SESSION DE 1999

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun ENS : Ulm et Lyon

DURÉE : 6 heures

La calculatrice n'est pas autorisée

Tournez la page S.V.P.

Avertissement

Les parties 5 et 6 sont indépendantes des parties 2, 3 et 4.

Les questions 1 et 2 de la quatrième partie peuvent se traiter en admettant les résultats des parties 2 et 3.

La question 3 de la quatrième partie n'utilise que la connaissance de $w(S_n)$, calculé dans la question 2 de la deuxième partie.

Notations

Dans tout le problème,

H désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie, dim H sa dimension,

$B(H)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications linéaires de H vers H,

$< -, - >: H \times H \to \mathbb{C}$ le produit scalaire hermitien (antilinéaire en la première variable, linéaire en la deuxième variable), $|| - ||$ la norme associée (i.e. pour $x \in H$, $||x|| =< x, x >^{1/2}$), et pour $T \in B(H)$, $||T||$ est la norme subordonnée, i.e. $||T|| = \sup\{||T(x)||, ||x|| = 1\}$.

On désigne par T^* l'adjoint de T. On pose $T^0 = \mathrm{Id}$ (endomorphisme identité).

On désignera par I la matrice identité.

On désigne par $\mathrm{Tr}(T)$ la trace de l'endomorphisme T.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on désigne par $\mathrm{Re}z$ et $\mathrm{Im}z$ ses parties réelle et imaginaire, et par $|z|$ son module.

Définition

Soit $T \in B(H)$. On pose $w(T) = \sup\{\, | < x, Tx > |\,,\ ||x|| = 1\}$.

Première Partie

1. a) Que vaut $w(T)$ lorsque T est hermitien ?

b) Montrer que, pour tout $T \in B(H)$,

$$\frac{1}{2}||T|| \leq w(T) \leq ||T||.$$

(On pourra écrire T comme combinaison linéaire d'endomorphismes hermitiens).

c) Montrer que si $w(T) \leq 1$, alors : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \mathrm{Id} - zT$ est inversible.

d) Montrer que

$$w(T) = \frac{1}{2}\sup\{||e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*||, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

(On pourra commencer par montrer que

$$w(T) = \sup\{|\mathrm{Re}(e^{i\theta} < x, Tx >)|; ||x|| = 1, \theta \in \mathbb{R}\}).$$

2. a) On suppose que dim $H = 2$, et que dans une base orthonormale T a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $||T||$ et $w(T)$.
b) On revient à H de dimension finie quelconque. On suppose que $||T|| = 1$ et $w(T) = \frac{1}{2}$.

On se propose de montrer que H contient un sous-espace de dimension 2, stable par T et par T^*, tel que dans une base orthonormale convenable de ce sous-espace la restriction de T a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Soit $e_1 \in H$, $||e_1|| = 1$, tel que $||Te_1|| = ||e_1||$. On pose $e_2 = Te_1$. Montrer que $T^*e_2 = e_1$. (On pourra calculer $< T^*e_2, e_1 >$).
(ii) Montrer que $Te_2 = 0$ et que $T^*e_1 = 0$. (On pourra utiliser 1.d)).
(iii) Montrer que $< e_1, e_2 >= 0$ et conclure.

Deuxième Partie

Dans cette partie, on prend $H = \mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne standard, i.e. pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ dans H, $< x, y >= \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$.

1. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_n. (On pourra chercher ces derniers sous la forme $(\sin\theta, \sin 2\theta, \cdots, \sin n\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$).
b) Quelle est la norme de A_n?

Tournez la page S.V.P.

2. Soit $S_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $||S_n||$.

b) Calculer $w(S_n)$. (On pourra montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta}S_n + e^{-i\theta}S_n^*$ est semblable à A_n).

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$, avec $||x_0|| = 1$, tel que

$\{x \in \mathbb{C}^n, ||x|| = 1 \quad \text{et} < x, S_n x >= w(S_n)\}$ est l'ensemble $\{e^{i\alpha}x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Troisième Partie

On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite positive si A est hermitienne et satisfait à : $\forall x \in \mathbb{C}^n, < x, Ax > \geq 0$.

Dans cette partie, H est à nouveau un espace vectoriel hermitien de dimension finie.

1. Soit $\beta = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $\beta_{1,1} = 1$. On pose $\beta_{kl} = 0$ si $k \geq n+1$ ou $l \geq n+1$.

Soit $\gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par $\gamma_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i+1,j+1}$.

On suppose que γ est positive.

a) Montrer que

$$|\beta_{1,2}| \leq (\gamma_{1,1}\gamma_{2,2})^{1/2} + (\gamma_{2,2}\gamma_{3,3})^{1/2} + \cdots + (\gamma_{n-1,n-1}\gamma_{n,n})^{1/2}.$$

b) En déduire que $|\beta_{1,2}| \leq w(S_n)$, où S_n est la matrice introduite dans la deuxième partie, question 2.

2. Soit $T \in B(H)$ tel que $||T|| = 1$ et $T^n = 0$ pour un entier $n \geq 2$. (On ne suppose pas a priori n minimal; n et dim H n'ont a priori aucune relation entre eux). Soit $x \in H$, $||x|| = 1$. On pose, pour i et $j \geq 1$, $\beta_{i,j} =< T^{i-1}x, T^{j-1}x >$.

Montrer que la matrice $(\beta_{i,j} - \beta_{i+1,j+1})_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive, et que $w(T) \leq w(S_n)$.

Avertissement: Les questions 3.a) à 3.e) traitent d'un cas d'égalité qui n'est pas utilisé dans la suite du problème.

3. Soit $R \in B(H)$ tel que $||R|| = 1$ et $R^n = 0$ pour un entier $n \geq 2$. (On ne suppose pas a priori n minimal; n et dim H n'ont a priori aucune relation entre eux). On suppose aussi que $w(R) = w(S_n)$.

a) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in H$, $||x|| = 1$, tels que, en posant $T = e^{i\theta}R$, on ait $< x, Tx >= w(S_n)$.

On pose, pour i et $j \geq 1$, $\beta_{i,j} =< T^{i-1}x, T^{j-1}x >$.

Soit $\gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par $\gamma_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i+1,j+1}$.

b) Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ les valeurs propres de la matrice γ, et $\eta_1, \cdots, \eta_n$ des vecteurs propres correspondants, orthonormés.

(i) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j < \eta_j, S_n\eta_j >= \mathrm{Tr}(S_n\gamma) = w(S_n)$.

(ii) Montrer que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ et que $\eta_1 = e^{i\alpha}x_0$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, où x_0 est un élément de $\mathbb{C}^n$, avec $||x_0|| = 1$, tel que $< x_0, S_n x_0 >= w(S_n)$ (cf question 2.b) de la deuxième partie).

(iii) Montrer que $\beta_{i,j} =< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >$. (On pourra remarquer que la matrice β est uniquement déterminée par les coordonnées du vecteur x_0 dans la base usuelle de $\mathbb{C}^n$).

On désigne par V_x le sous-espace vectoriel de H engendré par $x, Tx, \cdots, T^{n-1}x$.

c) Montrer que $\dim V_x = n$. (On pourra utiliser les résultats des questions 3.b) ou 2.).

d) Montrer qu'il existe une isométrie $U : V_x \to \mathbb{C}^n$ telle que, si T_x désigne la restriction de T à V_x, $UT_xU^{-1} = S_n$.

e) Montrer qu'il existe une isométrie $J : V_x \to \mathbb{C}^n$ telle que, si R_x désigne la restriction de R à V_x, $JR_xJ^{-1} = S_n$.

4. Soit $n \geq 3$; quel est l'ensemble des valeurs possibles de $w(T)$, lorsque T décrit l'ensemble des endomorphismes de norme 1 tels que $T^n = 0$?

(On pourra considérer, pour $t \in [0,1]$, les matrices

$$S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \ ).$$

Quatrième Partie

1. Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats de la deuxième partie pour établir des propriétés de certains polynômes trigonométriques.

Soit n un entier ≥ 2, et $f(\theta) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k e^{ik\theta}$ un polynôme trigonométrique non identiquement nul et positif (i.e. $f(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$).

a) Montrer qu'il existe un polynôme trigonométrique $g(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{ik\theta}$ tel que $f(\theta) = |g(\theta)|^2$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(On pourra factoriser le polynôme $z^{n-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k z^k$).

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que $f_0 > 0$, que $|f_1| \leq f_0\, w(S_n)$ et que $w(S_n)$ est la meilleure constante possible dans cette inégalité.

2. L'objet de cette question est de montrer que la propriété établie dans la question 1.b) ci-dessus implique le résultat de la question 2. de la troisième partie.
On suppose donc acquis que si $f(\theta) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k e^{ik\theta}$ (où n est un entier ≥ 2) est un polynôme trigonométrique non identiquement nul et positif, alors $f_0 > 0$ et $|f_1| \leq f_0\, w(S_n)$.

Soit $T \in B(H)$ avec $||T|| = 1$ et $T^n = 0$. Soit $x \in H$ de norme 1. On associe à T et x le polynôme trigonométrique $f_x(\theta) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k e^{ik\theta}$, où f_k est défini par : $f_k = 1$ si $k = 0$, $f_k =< x, T^k x >$ si $k > 0$, et $f_k =< T^{|k|}x, x >$ si $k < 0$.

a) Soit $X = \mathrm{Id} + \sum_{k\geq 1}((e^{i\theta}T)^k + (e^{-i\theta}T^*)^k)$.
Montrer que $X = (\mathrm{Id} - e^{-i\theta}T^*)^{-1}(\mathrm{Id} - T^*T)(\mathrm{Id} - e^{i\theta}T)^{-1}$. (On justifiera pourquoi toutes les expressions écrites ont un sens).
b) Montrer que $f_x(\theta) =< x, Xx >$ et que $f_x(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
En déduire que $w(T) \leq w(S_n)$.

3. Le but de cette question est de donner une démonstration directe du résultat sur les polynômes trigonométriques positifs, à savoir que :
si $f(\theta) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k e^{ik\theta}$ est un polynôme trigonométrique non identiquement nul et positif, alors $|f_1| \leq f_0\, w(S_n)$.
a) Calculer $\sum_{r=0}^{n} f(\frac{2\pi r}{n+1})$.
b) Montrer que $\frac{f_1}{f_0}$ est barycentre à coefficients positifs des $e^{\frac{-2i\pi r}{n+1}}, 0 \leq r \leq n$, et qu'il en est de même de toutes ses images par les rotations de centre l'origine.
c) Conclure.

Cinquième Partie

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $|a| \leq 1$
(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < 1$, $\mathrm{Re}(1 - az) \geq 0$.

2. Soit $A \in B(H)$.
a) Montrer que : $w(A) \leq 1 \iff \mathrm{Id} - \frac{1}{2}(zA + \bar{z}A^*)$ est positif pour tout z tel que $|z| < 1$.
b) Montrer que : $w(A) \leq 1 \iff$ pour tout z tel que $|z| < 1$, $\mathrm{Id} - zA$ est inversible et $(\mathrm{Id} - zA)^{-1} + ((\mathrm{Id} - zA)^{-1})^*$ est positif.

3. Soit $A \in B(H)$ tel que $w(A) \leq 1$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(\mathrm{Id} - z^n A^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{Id} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} zA)^{-1}.$$

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $w(A^n) \leq 1$.
c) Soit $B \in B(H)$. Montrer que $w(B^n) \leq w(B)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Sixième Partie

Soit $A \in B(H)$. On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble

$$W(A) = \{< x, Ax >, ||x|| = 1\}.$$

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, avec $|z_i| = 1, 1 \leq i \leq 3$. Montrer que $W(A)$ est contenu dans le triangle de sommets z_1, z_2, z_3 si et seulement si A peut s'écrire $A = z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3$, où $A_1, A_2, A_3 \in B(H)$ sont des endomorphismes positifs et $A_1 + A_2 + A_3 = \mathrm{Id}$.

2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que : $||B|| \leq 1$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} I & B^* \\ B & I \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ est positive.

3. Montrer que si $W(A)$ est contenu dans un triangle de sommets z_1, z_2, z_3 alors $||A|| \leq \max|z_i|$.

4. Soit $T \in B(H)$ tel que $T = A + iB$, avec A et B positifs. Montrer que $||T||^2 \leq ||A||^2 + ||B||^2$.

5. L'inégalité de la question précédente est-elle encore vraie si on suppose seulement que A et B sont hermitiens ?